Concursul Interjudețean de Matematică "Cristian S. Calude"
Ediția a XVIII-a
Proba pe echipe, clasele IX-XII
22 noiembrie 2017

Soluții

Runda I

Problema 1.

Să se determine cel mai mic număr natural nenul n astfel încât numerele $14\cdot n, 16\cdot n, 18\cdot n, 20\cdot n$ să aibă același număr de divizori.

Soluție:

Cel mai mic număr n cu proprietatea din enunț va avea în descompunerea sa doar divizori primi ai numerelor 14, 16, 18 sau 20, deci va fi de forma $n=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d$. Notăm cu $d(x)$ numărul divizorilor lui x. Vom avea:

$d(14n)=(a+2)(b+1)(c+1)(d+2)$

$d(16n)=(a+5)(b+1)(c+1)(d+1)$

$d(18n)=(a+2)(b+3)(c+1)(d+1)$

$d(20n)=(a+3)(b+1)(c+2)(d+1)$

Obținem $a-1=3d,\ a+1=2c,\ 2a+1=3b$. Cele mai mici valori a, b, c, d numere naturale care verifică relațiile anterioare sunt $a=1,\ b=c=1,\ d=0$. Deci $n=2^1\cdot 3^1\cdot 5^1\cdot 7^0=30$.

Problema 2.

Fie $a, b, c\in(0,+\infty)$, astfel încât $2^a=35,\ 5^b=14,\ 7^c=10$. Să se calculeze $a\cdot b\cdot c-a-b-c$.

Soluție:

Din $2^a=35$ obținem

$2^{abc}=(5\cdot 7)^{bc}=\left(5^b\right)^c\cdot\left(7^c\right)^b=14^c\cdot 10^b=2^{b+c}\cdot 7^c\cdot 5^b=2^{b+c}\cdot 10\cdot 14=2^{b+c+2}\cdot 5\cdot 7=$

$=2^{b+c+2}\cdot 2^a=2^{a+b+c+2}$.

Am obținut $abc=a+b+c+2$, deci $abc-a-b-c=2$.

Problema 3.

Se consideră pătratele $ABCD$ și $ABC'D'$. Într-un sistem de coordonate avem $A(2,0),\ B(-1,4)$. Să se scrie ecuațiile dreptelor CD și $C'D'$.

Soluție:

Fie $D_1=pr_{Ox}D,\ B_1=pr_{ox}B$. $\Delta B_1BA\equiv\Delta D_1AD\Rightarrow AB_1=DD_1=3$ și $AD_1=BB_1=4\Rightarrow D(6,3)$.

Vom avea $x_A=\dfrac{x_D+x_{D'}}{2}\Rightarrow x_{D'}=-2$ și $y_A=\dfrac{y_D+y_{D'}}{2}\Rightarrow y_{D'}=-3,\ m_{AB}=\dfrac{4}{-3}\Rightarrow m_{CD}=m_{C'D'}=-\dfrac{4}{3}$.

Ecuația dreptei CD: $y-3=-\dfrac{4}{3}\cdot(x-6)\Rightarrow 4x+3y-33=0$, iar ecuația dreptei

$C'D'$: $y+3=-\dfrac{4}{3}\cdot(x+2)\Rightarrow 4x+3y+17=0$.